TÓPICOS DE MATEMÁTICA A NIVEL MEDIO

SOBRE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y PROBLEMAS RELATIVOS.

Comentarios Previos :

1. El tema ***ECUACIONES*** integra el currículo de Matemática de Enseñanza Media en todos los años. Esto de alguna manera da una medida de la importancia que se le asigna en la formación matemática del estudiante. Una medida no del todo clara , ya que ellas aparecen muy poco valoradas como herramientas idóneas en la resolución de problemas.

En algunos programas actuales de Matemática , las ECUACIONES aparecen en bolillas autónomas, ***con vida propia y procedimientos de resolución propios y pretendidamente generales***. Ellas aparecen y se resuelven con mecanismos, que la mayoría de las veces, carecen de explicaciones ; los fundamentos teóricos de las manipulaciones - que sí existen en Matemática - no son explicitados y se sustituyen por abundantes ***reglas de resolución de ecuaciones*** que no son tales y no tienen la validez general que explícita o implícitamente se les asignan.

2. En Matemática a Nivel Medio, ***las ECUACIONES deberían aparecer como resultado de matematizar un determinado problema*****.** O conjuntos de problemas que se resuelven con modelos matemáticos similares. El planteamiento de problemas y su intento inicial de resolverlos, deben preceder - como actividad matemática - a la resolución de ecuaciones. Esta es la posición que actualmente se afirma a Nivel Medio, que se deriva de las investigaciones modernas sobre Didáctica de la Matemática

El problema precede, como parece natural, a su análisis y resolución; a posteriori, y una vez logradas las ecuaciones que lo interpretan, comienza la preocupación por hallar sus soluciones ***en el marco de la estructura matemática en la cual están definidas***. Un posterior análisis de las soluciones, permitirá elegir aquellas que sean compatibles con el problema que las generó. Volveremos a insistir sobre este punto, luego de analizar brevemente el tema que anuncia el acápite siguiente.

I. SOBRE LOS PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN

Lo que se pretende, en principio, es ***discutir la validez de los procedimientos*** que se utilizan habitualmente en Enseñanza Media a la hora de resolver ecuaciones.

Mostrar, analizando una corta serie de ejemplos sencillos que, ***no hay reglas generales*** que permitan resolver todas y cada una de las ecuaciones que aparecen en los cursos de Matemática de Enseñanza Media. Ni las más simples y aparentemente triviales.

Insistimos ; muchos problemas, en distintas áreas del conocimiento humano, tienen solución por la vía de resolver ecuaciones del mismo tipo. Por ello puede interesar obtener ***fórmulas generales para determinado tipo de ecuaciones*** – por ejemplo, en las Ecuaciones Lineales y Sistemas, en las Ecuaciones de Segundo Grado –, porque un gran número de problemas se expresan y se resuelven a través de ellas.

Conocer el comportamiento general de estas ecuaciones importa, porque implica tener a mano una herramienta poderosa para el análisis y solución de múltiples problemas de muy diversa índole, tanto en la Matemática como en otras Ciencias.

Pero estas destrezas no pueden ser una suerte de recetas inconexas, sin un soporte matemático que les dé las necesarias garantías a los procedimientos de trabajo. Demasiadas reglas sin explicaciones convincentes, les resultan al estudiante medio, muy difíciles de retener y operar en la secuencia debida.

Por otro lado se hace notar que ***las pretendidas reglas de Transformación de Ecuaciones no son tales, si no se derivan de los axiomas o teoremas de la Estructura Algebraica en la cual se trabaja y del comportamiento de las funciones intervinientes***.

Se verá que para ilustrar estas afirmaciones, es suficiente analizar unos pocos ejemplos para invalidar dichas reglas. Se quiere advertir ***sobre lo que se debe y lo que no se debe hacer*** al resolver ecuaciones en Matemática a Nivel Medio ; mostrando que ***no hay recetas mágicas que todo lo pueden***.

II. ANÁLISIS DE ALGUNOS EJEMPLOS.

En la tarea de ***RESOLVER ECUACIONES*** a Nivel Medio es común enfrentarse al siguiente planteo :

Resolver la ecuación $f(x) = g(x)$

y se asume que el lector tiene de lo que se le está pidiendo que haga , una idea más o menos precisa. Normalmente hay ciertos acuerdos implícitos que interpretan los signos que aparecen y de los procedimientos que permiten encontrar la solución.

La experiencia indica que cuando se empieza a preguntar a los estudiantes cuestiones como : ***¿ qué significado le damos a la palabra ECUACIÓN ? ¿ qué son las letras x ? ¿ y las f y g ? ¿ y f(x) y g(X) ?*** , se tienen las más variadas respuestas. O sencillamente ninguna, porque nunca se le ha ofrecido explicaciones adecuadas. El suscrito estima que los profesores deberían poner un poco más de cuidado en los procedimientos de trabajo; que el hecho de resolver ecuaciones dejen de ser reglas que se ubican, muchas veces aleatoriamente, en el proceso de solución.

Por eso se hace necesario reflexionar sobre estos tópicos ; poner las cosas en su cauce normal y liberarlas de recetas.

Y esto que está puesto en tela de juicio, no aparece como un hecho aislado que ocurre de vez en cuando en el aula, los libros de textos cometen este tipo de errores. Y otros que hablan sobre la Educación Matemática y Sus Deficiencias, proponen al estudiante cuestiones del tipo : **Resuelve la ecuación 5.(x - 2) = 3x +14.** , sin ninguna explicación adicional.

Se reconoce que los términos de uso corriente, como ser : **ecuación, incógnitas, variables dependientes o independientes, constantes, parámetros, etc. ...** son de difícil definición a este nivel y se consideraría hasta perjudicial intentar hacerlo. El uso frecuente, con los cuidados debidos, es más que suficiente para no cometer errores lógicos gruesos.

Pero sí es necesario saber qué objetos matemáticos son ***x, f y g*** y donde tienen validez, y que procedimientos de trabajo son admisibles matemáticamente.

Dejemos en claro que, en el trabajo de Matemática a Nivel Medio, ***las x son elementos de un cierto conjunto de referencia W siendo f y g funciones con dominios en (f : A ® G (A Ì W) y g : A' ® G (A' Ì W)) siendo G el codominio común***.

Con esta observación se está diciendo que ***resolver ecuaciones es una actividad relacionada con conjuntos y funciones*** ; y por lo tanto en tren de eliminar ambigüedades se tendría que escribir algo del estilo siguiente :

Dado el conjunto no vacío W y las funciones f y g con dominios A y A' contenidos en W, - no interesando en principio su codominio G -, se pide identificar los elementos del conjunto

S = { x : x Î A Ç A' Ù f(x) = g(x) }

es decir : los elementos de Ω - que deben pertenecer simultáneamente a A y a A' - que tienen la misma imagen por f y g. La Teoría de Conjuntos permite asegurar que S queda unívocamente definido. Esto puede parecer demasiado formal para hacerlo en forma sistemática ; pero resulta inevitable hacerlo, por lo menos alguna vez, cuando se está iniciando el tema. El suscrito tiene la firme convicción de que el estudiante tiene derecho a conocer el porqué él hace ciertas manipulaciones con símbolos matemáticos, al menos una vez en la vida.

En general, y en nuestro trabajo, en el conjunto Ω están definidas operaciones y relaciones ; es decir, trabajamos con una estructura algebraica (Ω,+), o (Ω,+,.), o (Ω,+,.,<), o etc ... y las funciones se expresan analíticamente por ellas.

Luego <u>toda transformación</u> que hagamos en el proceso de llegar a encontrar las soluciones, tiene que ver con un axioma o teorema de la estructura algebraica de soporte y con los dominios de las funciones que intervienen. Sobre este aspecto se plantea el eje de todas nuestras inquietudes.

Por ellos es que nos planteamos las preguntas siguientes, y sus consiguientes respuestas, en el marco exclusivo de la Matemática.

A la pregunta siguiente : ***¿ <u>Existen teoremas de transformación de ecuaciones</u> ?*** tiene una sola respuesta, y es que **no**. Veamos un ejemplo sobre estas cuestiones.

1. *Es* habitual decir que ***" <u>operar miembro a miembro con igualdades da igualdades</u> "*** y tomar esta frase (proposición) como algo de validez general. Esto tiene una explicación sencilla dentro de la Matemática y no se hace necesario apelar a ***<u>verdades meta-matemáticas</u>***.

Veamos esto : si se trabaja en una estructura aditiva (Ω,+) (recordar que + es aquí una operación en Ω, es decir una función del tipo **+ :** W**x**W ® W) ; entonces

si a = a' y b = b' entonces a + b = a' + b'

porque a + b es la imagen del par ordenado (a,b) y a' + b' lo es del (a',b') y ambos pares son iguales por tener las primeras y segundas componentes iguales. Y como + es una función se tiene que a + b = a' + b'.

Esto termina con la supra–regla a la que se hacía referencia; y esto sirve para poner en tela de juicio las demás que aparecen habitualmente en los cursos y en los textos.

2. Otro ejemplo : es común admitir que ***<u>si un producto es nulo al</u>*** ***<u>menos uno de los factores vale cero</u>*** (presentar como una proposición de validez general la siguiente :

$$\text{“}\ \mathbf{a.b = 0 \rightarrow a=0 \vee b=0}\ \text{“)}$$

y esto también es falso como afirmación general ; las condiciones para su validez están dentro de la estructura algebraica en la que se trabaja. Si no vea que en $(Z_{12},+,.)$ (el conjunto Z_{12} se denomina <u>*Clases de Resto Módulo 12*)</u> se verifica que 3.4 = 3.8 = 6.2 = 6.4 = 6.6 = 6.8 = 6.10 = = 9.8 = 0 sin que sea ninguno de los factores cero.

Una observación más referente a ciertas fórmulas mágicas que aparecen con validez universal en la Matemática de Nivel Medio. La tan conocida fórmula del cuadrado de un binomio, es una proposición verdadera si es un teorema de la estructura algebraica sobre la cual se está trabajando. Si la estructura es - por ejemplo - (A,+,.) con A = {0,1,2} y las operaciones + y . están definidas por las siguientes tablas

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

es inmediato comprobar que la proposición :

$$\underline{\mathbf{(\forall a)(\forall b)(a \in A \wedge b \in A)\quad (a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}\ \textbf{ no es verdadera en (A,+,.)}}\ \textbf{.}$$

3. Se examinan a continuación algunos ejemplos relativos al tema : ***<u>Resolución de Ecuaciones</u>*** .

<u>EJEMPLO 1</u> : Un ejercicio consiste en : ***Resolver la ecuación (x - 1).(x - 2) = 0.***

La experiencia es persistente en afirmar que la respuesta, inmediata e irreflexiva, es que la solución (o soluciones) es ***x=1*** y ***x=2***. No aparecen cuestionamientos a la letra del ejercicio y no hay preguntas del tipo siguiente : ¿ qué son las *x* ? ¿ cuáles son las reglas a las que están sometidas ?. Al no saber sobre estas cuestiones, el ejercicio está mal planteado. Se verá a continuación que plantearlo bien no complica las cosas ; es más importante analizar las ideas matemáticas subyacentes, que ganar en destrezas en estos temas.

a. *Resolver en la estructura (N,+,.,<) la ecuación (x - 1).(x - 2) = 0.*

Entonces, la funciones **f** y **g** que se mencionan en la página 2., son **f : A** ® **N** y **g : A'** ® **N** siendo A = { x ∈ N : x ≥ 2 } y A' = N y f(x) = (x–1)(x–2) , g(x) = 0. Por lo tanto debe cumplirse que x≥2 ; pero además en esta estructura es verdadera la proposición : ((a ∈ N)(b ∈ N) ∧ a.b = 0) → a = 0 ∨ b = 0. En resumen, la solución de la ecuación es **x = 2**.

b. Resolver en (Z_{12} , +,.) la ecuación (x - 1).(x - 2) = 0.

Puesto que en esta estructura ***no vale*** la proposición enunciada en **a.** no se puede inferir que al menos uno de los factores sea cero. Por ejemplo, si *x = 5* se tiene *4.3 = 12 = 0 (0 y 12 son representantes de la misma clase en Z_{12})*, y resulta ser una solución. El lector puede comprobar que el conjunto solución ahora es **S = {1,2,5,10}**.

EJEMPLO 2 : El ejemplo que se menciona en la página 3., resuelve la ecuación *5.(x- 2) = 3x + 14* debería haber sido propuesto de la manera siguiente :

Resuelve en (N,+,.<) la ecuación 5.(x - 2) = 3x + 14

y un procedimiento riguroso de trabajo debería basarse en las Reglas de la Lógica, en las propiedades de (N,+,.,<) y en el hecho de que A = { x ∈ N : x ≥ 2 } y que A' = N; y solamente en eso.

A modo de ejemplo se podría proceder de la manera siguiente :
Sabemos que 5(x – 2) = 5x – 10 y que por la definición de *diferencia* 5x = (3x + 14) + 10. Teniendo presente que 5 = 3 + 2 y que 14 + 10 = 24 = 2.12, que vale la propiedad distributiva, y las asociativas ponemos lo siguiente : 3x + 2x = 3x + 24. Usando la cancelativa de la suma llegamos a que 2x = 2.12 y de aquí a **x = 12** , por la cancelativa del producto.

Si el lector la resuelve en (Z_{12},+,.), la ecuación queda 2x = 0 y la solución es **S = {0,6}** .-

EJEMPLO 3 : Analicemos la validez de la siguiente frase : **" *Si se le suma a los dos miembros de una ecuación un mismo número h, o una expresión entera H, se obtiene una ecuación equivalente* "** (Análisis Matemático de J.Rey Pastor – P.Pi Calleja – C.A.Trejo. Volumen I,Editorial Kapelusz S.A. Impreso 1954).

Consideremos por comodidad que estamos trabajando en la estructura algebraica ordenada de los Números Reales, (R,+,.,≤) y que hacemos intervenir funciones **f**, **g** y **h** con dominios en ella. Analicemos ahora los conjuntos soluciones :

$$S = \{ x \in A \cap A' : f(x) = g(x) \} \text{ y } S' = \{ (A \cap A') \cap A'' : f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \}$$

siendo $f : A \rightarrow R$, $g : A' \rightarrow R$ y $h : A'' \rightarrow R$ y A, A', A" subconjuntos no vacíos de R. Es claro que para que las ecuaciones sean ***equivalentes*** debe ocurrir que S = S'; y en nuestro caso va a depender de cómo se intersecan los conjuntos **S y A"**, y de nada más que eso.

OBSERVACIONES :

1. Estos pocos ejemplos muestran que las **rutinas** que se usan habitualmente, no son mecanismos cuya validez va más allá de toda duda. Es más, los llamados **Teoremas de Transformación de Ecuaciones** no son tales ; que sean o no válidos depende de la estructura algebraica en la cual se trabaje y de las funciones que aparecen en el enunciado.

2. El lector observará que explícitamente no aparece la llamada ***verificación*** ; las destrezas en la resolución de ecuaciones implican una secuencia de proposiciones lógicamente equivalentes cada vez más simples. Si no se cometen errores en la secuencia, las incertidumbres no aparecen y la verificación no es necesaria.

Parece muy atinada la siguiente frase : " ***... una demostración de trabajo bien hecho debería ganar más reconocimiento que la capacidad de los estudiantes para encontrar la respuesta correcta ...*** " (Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática. (NCTM) S.A.E.M. THALES)

3. El estudiante tiene el derecho de conocer alguna vez en su formación matemática, como se procede lógicamente para resolver una ecuación. Después de muy pocos ejemplos hechos al detalle, se pueden omitir pasos. Es decir, **si se despejaron las dudas conceptuales**, se puede obviar la declaración explícita de ciertos pasos de este proceso, para que no los gane el aburrimiento y el desinterés.

III. SOBRE LA IMPORTANCIA DE PENSAR LAS ECUACIONES COMO UNA HERRAMIENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1. Para terminar esta pequeña propuesta de trabajo, la posición del suscrito en cuanto al tema ECUACIONES es la que titula esta tercera parte. ***Las ECUACIONES deben aparecer como resultado de MATEMATIZAR un PROBLEMA.***

" ... El énfasis que hace la enseñanza tradicional en la manipulación de expresiones y la práctica de algoritmos como pasos previos a la resolución de problemas no tiene en cuenta de que el conocimiento surge a menudo de los mismos problemas ... " (Estándares ... ob.cit.)

Lo que no implica que los estudiantes vayan logrando ciertas destrezas en la manipulación algebraica de las ecuaciones, pero estas destrezas siempre deben ir apuntando a ampliar el rango de eficacia frente a problemas.

" ... Ya que las matemáticas son una disciplina básica para otras disciplinas y crecen en proporción directa con su utilidad, pensamos que el currículo debe ofrecer oportunidades para todos de desarrollar una comprensión de modelos, estructuras y simulaciones matemáticas que sean aplicables a muchas áreas del conocimiento. ... " (Estándares ... ob.cit.) . En el presente caso el estudio de ecuaciones de primero y segundo grado, sistemas lineales de ecuaciones, se constituyen en herramientas de análisis y solución de multitud de problemas **genuinos** y entonces vale la pena hacerlo.

" ... Un problema genuino es una situación en la que, por parte del individuo o del grupo implicado, hay todavía que desarrollar una solución apropiada o más de una. La situación ha de ser lo suficientemente compleja como para significar un reto, pero no tan compleja que sea insoluble. ... " (Estándares ... ob.cit.).

2. En tren de insistir sobre la proposición de ***problemas genuinos*** , estos no deben forzar la realidad para que ella se adecue a las ecuaciones o a las herramientas que aparecen en el currículo. Por otro lado se hace necesario que el estudiante disponga de las destrezas básicas mínimas, las cuales no mejoran por imposición de una carga alta de ejercicios de rutina.

Los problemas interesantes (genuinos) existen en abundancia y se van creando ; pero no resulta una tarea sencilla que cada docente lo haga por sí mismo. Lleva mucho tiempo y resulta un esfuerzo grande. Un **Banco de Problemas** es una tarea accesible si se la plantea el sistema educativo ; es decir los que tienen la responsabilidad técnica de la educación matemática en Enseñanza Media.

Los problemas que se proponen a continuación, no pretenden ser un paradigma a seguir. Es un aporte en la dirección de empezar a proponer ***problemas genuinos*** ;

cuanto más problemas lleguen a manos de los docentes, se dispone de más posibilidades de elección y selección.

3. <u>PROBLEMAS CUYAS SOLUCIONES INVOLUCRAN EL MANEJO DE ECUACIONES EN EL C.B.U.</u>

<u>Problema 1</u>. La temperatura en las escalas lineales **<u>Celsius</u>** (C) y **<u>Fahreinheit</u>** (F) están ligadas de la siguiente manera : i. 0 (C) equivale a 32 (F) y ii. 100 (C) equivale 212 (F) .

a. Sean x (C) e y (F) la temperatura de un cuerpo en el mismo instante ; establezca una relación entre x e y (es decir una ecuación que ligue a x y a y).

b. Si y = f(x), determine en grados (F) la temperatura de una persona que tiene 36°5 (C) .-

<u>Solución :</u> a. 5y - 9x = 160 ; b. y = 97,7 (F) .-

<u>Problema 2</u>. Un gato mecánico está diseñado para levantar ejes delanteros de automóviles (AΔ = 20 cm ΔH = 180 cm ; A automóvil , Δ punto de apoyo , H hombre).

H A

↓ Δ
↓ **F**
F' ↑

La **<u>Ley de la Palanca</u>** expresa que la condición de equilibrio está ↓ x
Δ 1-x
dada por la ecuación :

$$\mathbf{F.\ x\ =\ F'.\ (1\ -\ x)}$$

Un automóvil pesa 990 kg y su distribución de pesos es de 55% en eje delantero ; calcular que fuerza debe hacer el hombre en el extremo del gato para levantarlo por eje delantero.

<u>Solución</u> : F' = 60,5 kg .-

Problema 3 : Una fábrica elabora dos tipos de tela X e Y usando lana de dos colores R (rojo) y V (verde) ; se necesitan las siguientes cantidades (en gramos) para elaborar un metro cuadrado de tela :

	X	Y	
R	120	60	(se dispone de 30000 gramos de lana roja)
V	90	240	(se dispone de 36000 gramos de lana verde)

El fabricante desea saber de que forma debe usar los materiales bajo el supuesto de que obtiene un beneficio de $U 150 por m^2 de tela X y $U 90 por m^2 de tela Y. Siendo x e y las cantidades de metros cuadrados de tela de cada clase a fabricar, se pide :

a. Determinar las ecuaciones que expresan las restricciones debidas a las cantidades de materiales disponibles y representar gráficamente la solución.

b. Expresar la función ganancia en la forma **g** = G(x,y), determinar su máximo y en consecuencia calcular los metros de tela de cada clase a fabricar. (Reformado de S.Vajda ; Introducción a la programación Lineal)

Solución : ***a.*** $120x + 60y \leq 30000$

$$90x + 240y \leq 36000$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Cada ecuación representa un semiplano ; por lo tanto la solución del sistema, en este caso es un cuadrilátero que el lector construirá.

b. La función ganancia es **g** = 150x + 90y ; su máximo ocurre en el punto ~ (215,70) y g_M vale ~ **$US 400.**

Problema 4 : Una sustancia se distribuye en forma continua sobre el intervalo [0,10] (en centímetros) ; la concentración viene dada por la fórmula $\mathbf{C(x) = - x^2 + 4x + 12}$ (en gramos por centímetro). Determinar la concentración máxima y en que punto del intervalo ocurre.

Solución : Se puede expresar la concentración en la forma $C(x) = 16 - (x - 2)^2$. El máximo ocurre en x = 2 y vale C(2) = 16.

Problema 5 : Una fábrica de prendas tejidas recibe utilidades (ganancias o pérdidas) según el número de horas trabajadas por jornada ; no se puede superar las 12 horas por jornada. Se simboliza por **t** el tiempo en horas por jornada y por **I(t)** la utilidad en miles de dólares para una jornada de t horas. Se sabe que ambas variables están ligadas por la ecuación **$I(t) = -t^2 + 11t - 24$ (t Î [0,12]) .** Se pide :

a. ¿ En qué casos la fábrica obtiene utilidad negativa (pérdidas) y en cuál ganancias ?

b. ¿ Cuándo se da aumento de utilidades y cuándo se da disminusión ?

c. ¿ Cuántas horas debe trabajar por jornada para que la utilidad sea máxima ? ¿ Y cuánto es el máximo ?

(tomado de " Matemática Sexto " de O.Balparda, M.Sbárbaro y L..Lois) .

Solución : Expresando **$I(t) = 25/4 - (t - 11/2)^2$** se concluye que :

a. $I(t) < 0$ si $t \in [0,3) \cup (8,12]$, $I(t) > 0$ si $t \in (3,8)$ y $I(3) = I(8) = 0$.

b. Se da aumento en $[0,11/2]$ y disminución en $[11/2,12]$.

c. $I(11/2) = 25/4$ (6.250 dólares) es el máximo de ganancia y ocurre para t = 5,5 horas por jornada.

***Responsable :* RODOLFO LOURO.**

Junio 2001.