



**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

Maestría en Matemática Educativa

COMPILACIÓN

LECTURAS BÁSICAS

CURSO

Paradigmas en Matemática Educativa

**M.C. MARTHA C. VILLALBA
COMPILADORA Y EDITORA
2004**

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Página 3

Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica

JUAN D. GODINO

Página 4

Epistemologías de Matemáticas y de la Educación Matemática.

SIERPINSKA, A. y LERMAN, S.

Página 50

El Aprendizaje como

una Actividad Constructiva

ERNST VON GLASERSFELD

Página 70

Didáctica de la Matemática en Francia

FRANGOIS PLUVINAGE

Página 83

Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas

GUY BROUSSEAU

Página 85

JUEGOS DE MARCOS Y DIALECTICA HERRAMIENTA-OBJETO

RÉGINE DOUADY

Página 142

La Geometría en el Salón de Clase

RÉGINE DOUADY & BERNARD PARZYSZ

Página 149

FUNDAMENTOS Y METODOS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*

**Guy Brousseau¹
Universidad de Burdeos I**

*"Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques". *Recherches en Didactique de Mathématiques*, Vol. 7 No. 2, pp. 33-115, 1986.

¹ Consultado en: *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas*. CINVESTAV-IPN México, 1993

Selección realizada por Mercedes Villalba, Profesora Didáctica de Matemática IFD Mercedes (2006)

Capítulo VI

LAS SITUACIONES A-DIDACTICAS

6.2 Necesidad de distinguir diversos tipos de situaciones a-didácticas

6.2.1 Las interacciones

Las relaciones de un alumno con el medio pueden ser clasificadas al menos en tres grandes categorías:

- los intercambios de juicio (3)¹¹.
- los intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (2),
- los intercambios de acciones no codificadas o sin lenguaje: las acciones y las decisiones que actúan directamente sobre otro programa sobre el otro protagonista (1).

Esas categorías están encajonadas, pues un intercambio de juicios es un intercambio de informaciones particulares, y éste un tipo particular de acción y de decisiones. Ellas lo son estrictamente.

- i) Hay interacciones en donde el jugador expresa sus elecciones y sus decisiones sin ningún código lingüístico, por medio de acciones sobre el medio. Asimilaremos a esta clase de interacciones aquellas en las que aparecen mensajes de una codificación tan fácil en relación a la acción que no jugará ningún papel en el juego. Al igual que aquellas en donde hay intercambios de mensajes pero sin relación con la solución del problema. Por ejemplo, el jugador se expresa o mantiene una conversación anodina con un tercero sin esperar una retroacción.

Puede suceder también que el « jugador » sea una pareja de alumnos cooperando en la captura común tras haber intercambiado informaciones y juicios. Pero esta relación compuesta comporta una componente de acción perfectamente identificable a la cual se sobreponen otras interacciones que tienen finalidades locales y temporales. Si el intercambio de información no es necesario para la obtención de la decisión, si los alumnos comparten las mismas informaciones sobre el medio, la componente « acción » es preponderante. (1)

- ii) Por igual, existen interacciones en las que el jugador actúa emitiendo un mensaje en relación a la intención del medio antagonista sin que ese mensaje signifique la intención de emitir un juicio. No se trata solamente de clasificar en esta categoría las órdenes, las preguntas, etc., sino también todas las comunicaciones de informaciones. Ciertamente, la mayoría de las informaciones son implícitamente acompañadas por una afirmación de validez. Pero en la medida en que el emisor no indique explícitamente esta validez, si no se espera ser contradicho o llamado a verificar la información, si el contexto no da cierta importancia a la cuestión de saber si la información es verdadera, cómo y por qué o si esta validez es susceptible de ser establecida sin dificultad, entonces el mensaje será clasificado como simplemente informativo. La información así dada se supone que cambia al menos la incertidumbre del medio y en general su « estado ». (2)¹¹
- iii) Existen en fin interacciones en las que los mensajes intercambiados con el medio son aseveraciones, teoremas, demostraciones, emitidas y recibidas como tales. La diferencia entre una información y una afirmación de validez es suficientemente clara e importante en matemáticas para que sea inútil insistir aquí en ello. Veremos más adelante que esas declaraciones pueden ser ellas mismas de diferentes tipos, según que se refieran a la validez sintáctica o a la validez semántica del enunciado contenido en la aseveración, según que intervengan como prueba, demostración o como axiomas o definiciones. Se podría también invocar la validez pragmática, la apreciación sobre la eficacia del enunciado. (3)¹¹

No es necesario probar aquí la importancia para la enseñanza del distinguir esos tres tipos de producción esperados por los alumnos.

Son señalados en los trabajos experimentales que este ensayo teórico acompañaba:¹²

¹¹ "Esos números remiten el mismo tipo de hipótesis: (1) Acción, (2) Formulación, (3) Validación.

¹² Brousseau, *Les obstacles épistémologiques*, tesis de Estado.

- el primero como « acciones » sobrentendido no incluir las formulaciones o las declaraciones de validez que pueden acompañarlas,
- el segundo como « formulación » sobrentendido sin debates de prueba.
- el tercero -el término no es feliz, pero se le utiliza desde hace catorce años - como « validación ».

6.3 Primer estudio de los tres tipos de situaciones a-didácticas

6.3.1 Esquema de la acción

La figura 1 simboliza el modelo general de la acción sin interlocutor.

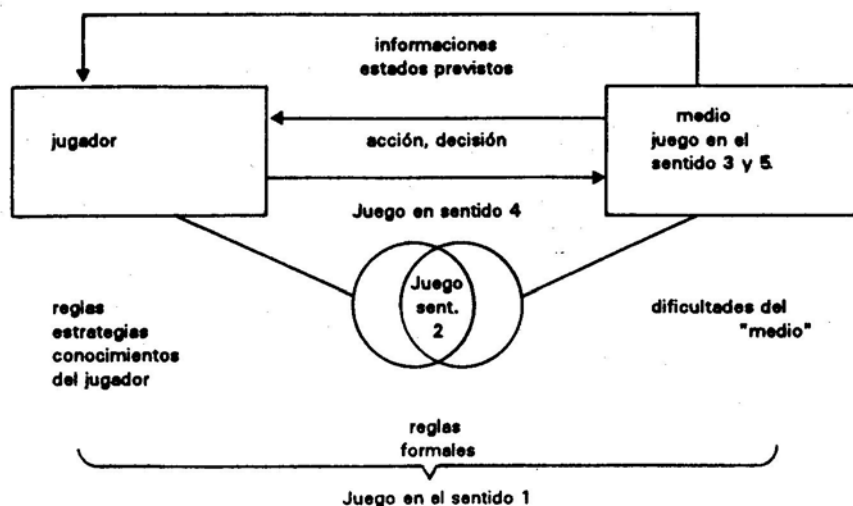


Fig.1

Ella permite ya proporcionar una red de lectura de una situación real de enseñanza.

- ¿Está percibido el « contrincante » (el medio) como desprovisto de intenciones didácticas?
- El alumno tiene que escoger efectivamente cada vez un estado entre varias posibilidades. ¿Sabe entre cuales?
- ¿Puede perder el alumno? ¿Lo sabe? ¿Conoce por adelantado el estado final (la clase de estados finales) en particular el estado final ganador?
- ¿Conoce las reglas precisas del juego sin conocer una estrategia ganadora? ¿Se le pueden enseñar las reglas sin darle una solución? (¿tiene una estrategia final por hacer?)

- ¿Es necesario el conocimiento buscado para pasar de la estrategia de base a una estrategia mejor (u óptima)? ¿Es ella el medio principal de ese pasaje?
- ¿Puede volver a empezar? ¿Es la anticipación « premiada » en el juego?
- ¿Tiene el alumno una oportunidad para encontrar por él mismo la estrategia buscada si la toma prestada (a otro alumno).
- ¿Las < respuestas > (a-didácticas) del sistema a las elecciones desfavorables del alumno son sin embargo pertinentes para la construcción del conocimiento (dan indicaciones específicas del error)?
- ¿Son posibles los controles de las decisiones (el alumno es llevado a notarlos, a observarlos)?
- ¿Es la actitud reflexiva útil o necesaria para progresar en la solución?

Con esos últimos puntos nos aproximamos a las condiciones límites de una situación de acción: considerar la validez de una solución proviene de una situación de validación; ciertamente, un alumno que reflexiona naturalmente en su juego está en una situación a-didáctica efectiva de acción, pero interioriza y simula de alguna manera una situación de validación. Si el enseñante es llevado a querer que el alumno tenga esta postura reflexiva, el encantamiento (« ¡Reflexiona! Observa lo que has hecho... ») podrá no bastar y el maestro deberá comunicar su deseo didáctico por medio de una situación de validación.

El principio, que representamos en un primer enfoque por una incertidumbre en el sentido de la teoría de la información, es una de las condiciones más importantes que surgen así a la luz. La distinción entre la situación didáctica y la situación a-didáctica permite concebir para el alumno, situaciones abiertas de enseñanza del pensamiento matemático, porque ya está < hecho >. La manipulación de este inicio a nivel de una clase completa es un problema técnico delicado, pero accesible: por ejemplo, hacer de manera que la búsqueda de cada alumno no sea entorpecida por el trabajo de otro es un problema didáctico (y no de pedagogía).

Esta red de lectura puede servir también para la concepción de situaciones didácticas nuevas. Cada juego propuesto puede ser examinado y comparado a los que ya se conocen. Es posible fijar problemas de ingeniería, (le clasificar dispositivos conocidos y reagrupar *desde el punto de vista de esta modelización*, las producciones semejantes, y prever nuevas. El problema esencial que sigue siendo del ámbito experimental es el de la importancia de la realización, o no, de las condiciones así propuestas, como desprendiéndose lógica o sistemáticamente de las posibilidades del modelo.

Las variables que así aparecen tienen razones teóricas para ser pertinentes, que cálculos económicos de complejidad, o de eficacia pueden precisarlas. La confrontación con la contingencia o con la experiencia tal como es practicada en la mayoría de las investigaciones es insoslayable.

El modelo, bajo este punto de vista, juega su papel desde hace ya diez años, su eficacia queda atestiguada por el número de situaciones de enseñanza originales que no cesa de producir.

Cuando las propiedades de una situación capaz de justificar (o de provocar) la puesta en acción de un conocimiento específico se conocen mejor, es posible estudiar las posibilidades que tiene la primera de hacer evolucionar a la segunda. Las variables didácticas son aquellas que influyen sobre el aprendizaje y de las que el enseñante puede elegir su valor (Ingeniería - Investigación sobre la enseñanza del cálculo numérico). Numerosos problemas de aprendizaje han sido estudiados con la ayuda de ese modelo. (Véase un párrafo especial de la bibliografía.)

6.8.2 Esquema de la comunicación

El < medio > comprende un sistema receptor y/o emisor con el cual el jugador intercambia mensajes.

Supondremos aquí que el objeto de esos mensajes no es actuar sobre el receptor (cambiarlo, adquirir poder sobre él, oponérsele, etc.) sino *actuar* por su intermedio sobre el dispositivo « medio ».

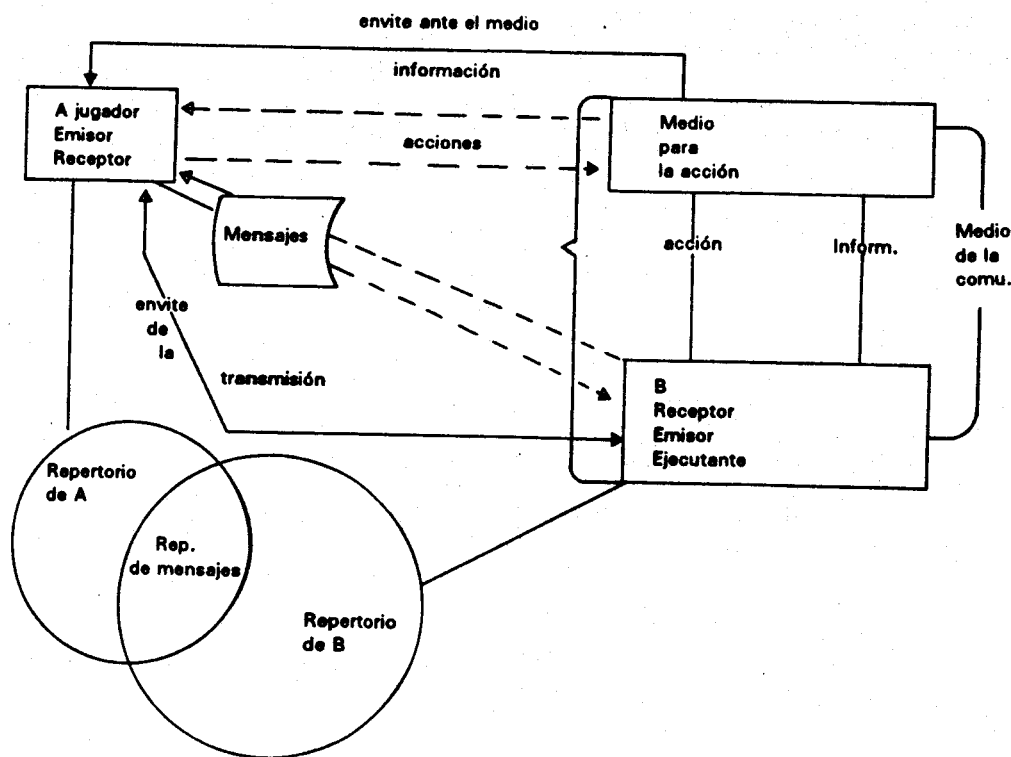


Fig. 5

El alumno está siempre comprometido en un juego con un dispositivo medio, desprovisto de intenciones didácticas. Si tuviera a la vez informaciones y medios de acción suficientes para elegir sólo los estados del « medio », sus mensajes, no teniendo ninguna finalidad en el juego, podrían ser cualesquiera. Suponemos también por el momento que no hay más que un único jugador A. El receptor no tiene otro envite que servir al jugador B y no hace personalmente ninguna elección.

Los diferentes casos son evidentes:

- medios de acción insuficientes. A debe describir la acción que B debía efectuar y a menudo también una parte del medio para que el mensaje sea inteligible.
 - informaciones insuficientes para A pero medios suficientes, es B quien debe describir el medio y A, decodificar la descripción y dirigir la observación.
- item • medios de acción e informaciones insuficientes para A...

En el primer caso, por ejemplo para A, el sentido del mensaje (la información contenida necesaria al juego) que él envía a B , puede ser representado por el pasaje (la pareja) de las elecciones de acción que el juego ofrece a B a aquel elegido por A.

En el segundo, es el paso de las elecciones consideradas por A, antes de la aportación de información de B a las que considera después.

El hecho de que B sea también un jugador, puede tener una cierta importancia, pues disminuye la libertad de A y por tanto el sentido de su acción. Claro está que hace falta que coopere con A. El esquema no es diferente hasta que los papeles queden bien identificados o indiferenciados (pero entonces un jugador no puede dejar al otro ninguna elección por hacer, ni ninguna acción).

Los mensajes intercambiados están bajo el control de códigos lingüísticos, formales o gráficos y por tanto los hacen funcionar.

El envite de la comunicación misma se expresa por las retroacciones que ejercen uno sobre el otro los dos interlocutores, para asegurarse que se han entendido. Sus exigencias se referirán a la conformidad al código (mínima para la inteligibilidad del mensaje) la ambigüedad, la redundancia, la falta de pertinencia (de las informaciones superfluas) y la eficacia (las características óptimas) del mensaje.

Combinando juiciosamente un medio (un juego en el sentido 4) y condiciones convenientes de intercambio del mensaje (por ejemplo refiriéndose al canal), es posible influenciar el tipo y el sentido de los mensajes obtenidos del jugador.

Es posible también hacer evolucionar al código mismo: pasar de una formulación en lenguaje natural a un enunciado formal, o a metáforas con descripciones matemáticas.

Esos resultados han sido obtenidos en varias investigaciones, pero hay que esperar también desengaños a causa de la enorme capacidad de invención semiológica de los niños.

Ese esquema de situaciones a-didácticas presenta cierto interés para dar sentido (o para analizar el sentido de) un mensaje, de una fórmula. Tomemos un ejemplo completamente teórico y un poco provocativo: busquemos una organización social (teórica) para hacer aparecer la emisión (por un niño de 5 o 6 años para fijar las ideas) de la fórmula « $C \ 13 = 9 + 4$ » tomada como información y (no como aseveración). Es preciso que el emisor E de la fórmula se dirija a un destinatario D . Si D conoce el significado de 13 y el de $9 + 4$ el mensaje no puede aportarle eventualmente una información más que sobre « = » paradigma de un conjunto muy restringido: ($=$, $=$). El enunciado será más informativo si uno de los dos términos no es conocido por el destinatario, por ejemplo si el alumno describe convencionalmente un cálculo. (9 es conocido así como 4, el resultado de su suma es 13).

Pero si se considera que el primer término es él mismo un mensaje, el mensaje debe ser emitido por un emisor. $E1$ para un destinatario $D1$ con el fin de informarlo por ejemplo sobre el estado de un stock. $9+4$ es un mensaje emitido por $E2$ a la intención de $D2$ en un código diferente para informarlo sobre el estado de otro stock o del mismo, entonces, el mensaje completo informa a $D1$ que los dos mensajes 13 y $9+4$ designan el mismo objeto. No queda ya más que encontrar un juego que haga más plausible ese funcionamiento de 6 personas.

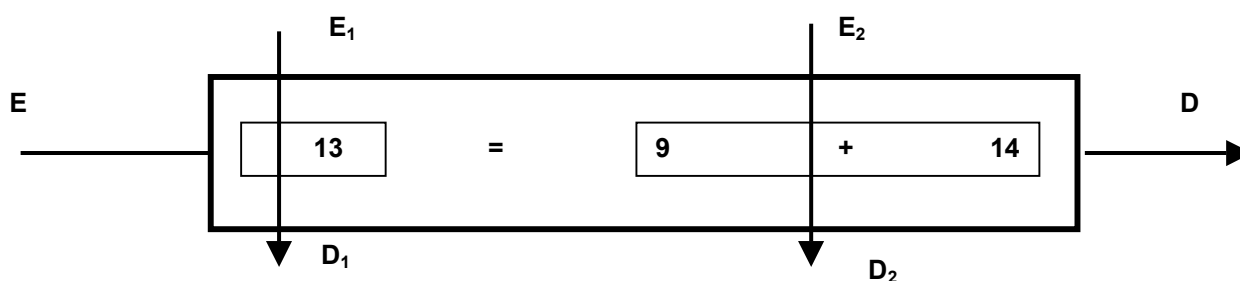


Fig. 6

¿Por qué habría necesidad de saber si los dos mensajes en « lengua 1 » y en « lengua 2 » designan o no el mismo objeto...?

Ese tipo de razonamiento no conduce siempre a un juego utilizable en clase (es ese el caso aquí), aun cuando se hayan hecho ensayos, pero es un medio muy eficaz para analizar el sentido de las producciones de los alumnos y para proponer medios de control.

Las variantes son fácilmente consideradas como la autocomunicación que conduce más cómodamente para guardarlo en la memoria, en códigos personales. El paso de lo oral a lo escrito, o de la gráfica al discurso han sido a menudo observados y han dado lugar al estudio de la influencia de numerosas variables¹⁶.

Utilizar el lenguaje matemático de manera precisa en comunicaciones deliberadas entre alumnos es ciertamente uno de los mejores resultados pedagógicos de ese tipo de situaciones. Hay que subrayar la importancia:

- de la calidad del juego con el medio con el fin de asegurar y mantener la pertinencia y la riqueza del discurso de los alumnos,

¹⁶ Cf. *La création d'un coda à l'école maternelle et L'enseignement de la géométrie*

- de la frecuencia de empleo que suscita en las comunicaciones,
- de la posibilidad de analizar los mensajes producidos.

6.3.3 Esquema de la validación explícita

Las situaciones de comunicaciones convenientes favorecen la aparición de mensajes que pueden tener una forma muy cercana al discurso matemático y que son concretamente significativas para cierto « medio ». Pero esos mensajes no tienen el sentido de un texto matemático. Las situaciones de validación van a poner ante sí a dos jugadores que se enfrentan a propósito de un objeto de estudio compuesto de mensajes y descripciones que el alumno ha producido por una parte, y del medio adidáctico que sirve de referencia a esos mensajes por la otra (figura 7). Los dos jugadores son alternativamente uno que « propone » y un « oponente »; ellos intercambian aseveraciones, pruebas y demostraciones a propósito de la pareja « medio/mensajes ». Esa pareja es el nuevo dispositivo, el « medio » - el juego en el sentido 4 - de la situación de validación. Puede presentarse como un problema acompañado de sus tentativas de soluciones, como una situación y su modelo, o como una « realidad » y su descripción...

Mientras que el informante y el informado tienen relaciones disimétricas con el juego (uno sabe una cosa que el otro ignora), el que propone y el oponente deben estar en posiciones simétricas, tanto en lo que concierne a las informaciones y los medios de acción de que disponen en el juego y en los mensajes, como en lo que concierne a sus relaciones recíprocas, los medios de sancionarse mutuamente y los envites con respecto a la pareja medio/ mensaje.

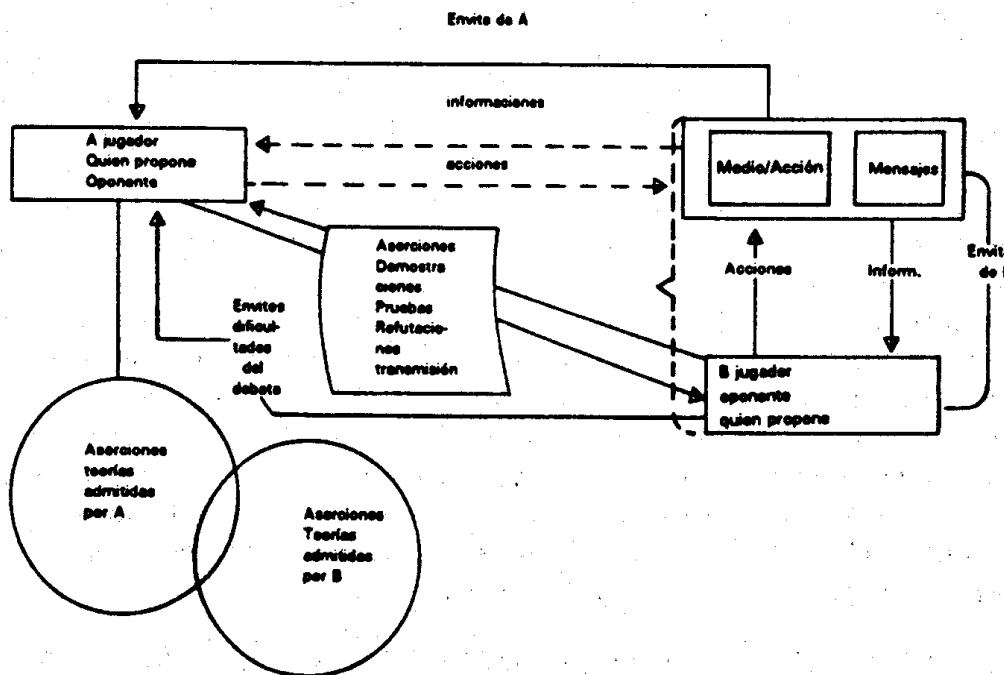


Fig.7

La didáctica se encuentra ante el desafío de producir situaciones que permitirán al alumno poner en acción los saberes y los conocimientos matemáticos como medios efectivos de convencimientos (y por tanto para convencerse) al tiempo que lo llevan a rechazar los medios retóricos que no son pruebas buenas o refutaciones.

El sentido exacto de las declaraciones de matemáticas está condicionado por este abanico de elecciones: lo que dice un teorema es también lo que contradice, lo que dice una demostración es, no solamente lo que ha sido supuestamente admitido por quien propone y el oponente, sino también lo que habría podido ser impugnado. El discurso matemático se construye parcialmente en contra de otros procedimientos de adquisiciones de creencia y de conocimiento y no solamente con.

Precisemos el juego de la prueba.

« A » propone un enunciado: es la declaración de una propiedad cuyo conocimiento es útil para dominar las relaciones (de A o de B) con el medio, el envite fundamental es siempre « ganar » en un cierto « juego ».

« B », si quiere aceptar y servirse, debe:

- ya sea « pagar ». A cada vez, es un reconocimiento de validez pragmática,
- o bien « pagar » de una vez por todas aceptando la proposición como verdadera.

Pero puede también adoptar el proceso de refutación si piensa que la declaración de A es falsa. Refutación pragmática: si puede « obligar » A a jugar un tiro decepcionante de su enunciado. Si la declaración es falsa y si la situación es correcta, el tiro debe ser perdiendo (lo que no es fácil de obtener). Es el dispositivo que hace funcionar el contra-ejemplo. B puede obligar A a jugar su tiro perdiendo tan frecuentemente como tiene turno (que le toque jugar) hasta que A retire su declaración. Refutación intelectual. B puede también proponer a A un negocio: puede proponerle una refutación explícita de su declaración inicial, esta refutación puede economizarle una costosa obstinación. Si A acepta (él paga un poco a priori), por ejemplo desistiendo de su tiro, B se convierte a su turno en quien propone. A acepta la refutación, o la rechaza... Los argumentos son siempre los que el oponente puede recibir- al igual que en toda comunicación el repertorio debe ser el del receptor para que el mensaje sea comprendido. Así se crea < de facto > una teoría, en tanto que conjunto de observaciones aceptadas por los dos jugadores. Puede ocurrir en cada momento que uno de ellos descubre que un conocimiento no es compartido, cuando que creía que su contrincante podía disponer de ello. Todas las aserciones de la < teoría > son así susceptibles de verse aclaradas e impugnadas. La teoría misma es un objeto de estudio y de construcción.

Los medios técnicos de esas demostraciones y los argumentos pueden ser de orden semántico - adecuación al < medio >, al problema - o de orden sintáctico a varios niveles: articulación y validez matemática, constitución lógica y hasta formal del argumento. Pero también de orden epistemológico, como lo demuestra Lakatos¹⁷.

El uso de situaciones de prueba restaura un entorno socio-cultural que da espesor al discurso matemático. Las situaciones de validación pueden ayudar al profesor, hacer vívida en una clase una auténtica pequeña sociedad matemática. Pero al restaurar un sentido, se toma el riesgo de aumentar las dificultades de aquellos que no entrarán a ese juego, y para quienes el teorema y aun las demostraciones no son más que saberes como otros que se exhiben en la demostración. Una situación de validación no es, a priori, la mejor de las situaciones de aprendizaje de saberes institucionalizados. Ella puede hasta suscitar obstáculos didácticos y resucitar obstáculos epistemológicos molestos. Sin embargo es esencial como paradigma de otras situaciones matemáticas. Es lamentable, por ejemplo, que la geometría enseñada en la secundaria no utilice ese proceso, cuando que ella puede justificarse como primer ejemplo del pensamiento axiomático ante un campo naturalmente dominado por otros medios. La matematización dada completamente hecha, es aquí contradictoria con el objetivo didáctico anunciado.

¹⁷ Lakatos, Preuves et réfutations, traduc. al francés de Laborde et Balacheff (Hermann).

Al lado de sus propiedades epistemológicas o didácticas, esas situaciones sociales pueden presentar ventajas interesantes en el ámbito de la motivación de los alumnos - motivaciones bastante frecuentemente transferibles.

Esta motivación puede manifestarse no sólo en el caso en que la situación es realmente organizada y efectivamente vivida, sino también cuando es simulada, relatada o interiorizada.

Los alumnos cooperan en la medida en que llegan a compartir el mismo deseo de esperar una verdad.

Ellos deben recibir, a priori, con respeto, el punto de vista de su oponente y defender el suyo sin falsa modestia, por todo el tiempo necesario hasta que sean convencidos de lo contrario; pero si se revela que están equivocados, deben aprender a cambiar inmediatamente de postura, sin amor propio desplazado y sea cual fuere el precio social.

Esas situaciones muestran la fijación profunda de la actividad matemática en el pensamiento racional y la importancia educativa de su envite que rebasa el simple ámbito del aprendizaje de conocimientos. En las situaciones concretas que se desprenden de ese modelo, cuando son explotables, el carácter un poco formal de esta < competencia > desaparece. Las dificultades quedan muy presentes pero no aparecen con aridez.
