Alicia Xavier de Mello (2000) Revista Quehacer Educativo Nº 43, Setiembre 2000. FUM. Montevideo

ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICAS A PARTIR DE PROBLEMAS.

En las producciones actuales en Didáctica de la Matemática, hay consenso en presentar la resolución de problemas como la modalidad de trabajo más adecuada a la hora de enseñar y aprender Matemáticas. Sin embargo, el marco de la resolución de problemas, no se presenta como un enfoque con sustento teórico uniforme. Dentro de las propuestas de trabajo por problemas aparecen diversas modalidades que responden a elaboraciones teóricas de distinto alcance.

APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS.

Esta corriente hace un planteo de corte procedimental, relacionado más que con el "saber", con el "saber hacer".
Enfoca la resolución de problemas como una competencia a adquirir, basada en el dominio y seguimiento de ciertos pasos que deberán ser aprendidos por los alumnos. Los más difundidos son los que describiera Polya (1972): 1 – Comprender el problema o etapa de familiarización; 2 – Concebir un plan para su resolución; 3 – Ejecutar el plan; 4 – Examinar la solución obtenida.

A partir de Polya, que presentó una lista de ellas, otros autores han trabajado en la descripción y análisis de las llamadas **estrategias de resolución de problemas.** Estas estrategias deberán ser aprendidas por los alumnos y serán luego las que le permitirán revisar el proceso seguido, en la etapa de retrospección que seguirá a la resolución del problema.

Son presentadas como estrategias heurísticas en el sentido de que no son prescriptivas como los algoritmos, sino que describen formas de resolución que cada persona decidirá cómo emplear.

Algunas de estas estrategias de resolución de problemas son: reconocer el problema, seleccionar los datos, pensar en problemas semejantes ya resueltos, imaginar un problema semejante pero más sencillo, encontrar regularidades o simetrías, hacer una representación gráfica, descomponerlo en partes, analizar el resultado en relación al contexto.

Este enfoque pone también énfasis en los aspectos actitudinales y en el clima de la clase.
Los alumnos deben desarrollar ciertos hábitos y actitudes matemáticas: motivación, perseverancia, confianza en sus capacidades, toma de decisiones, trabajo cooperativo.
Para emprender la resolución de problemas los alumnos necesitarán un ambiente motivador, un aula no convencional donde se puede preguntar, probar, equivocarse y volver a comenzar.

"Para la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) aprender matemáticas es ante todo "hacer matemáticas" y la enseñanza de esta disciplina debe desarrollar por encima de todo la capacidad de resolver problemas, razonar y comunicar matemáticamente y al mismo tiempo estimular la apreciación del valor de las matemáticas y la confianza de los alumnos y alumnas para que participen en actividades relacionadas con ellas"[1]

Se apunta al desarrollo de procesos como formular, probar, argumentar, a partir de exploraciones e investigaciones. Se valora el proceso más que los resultados obtenidos: " lo que constituye el objetivo es el viaje y no el destino"[2]

En este enfoque la labor del docente consiste en promover en los alumnos la competencia de resolver problemas, competencia que coincidimos en considerar como una herramienta intelectual valiosa, no solamente en el dominio de la Matemática, sino en las diversas y variadas situaciones que deberán enfrentar dentro y fuera de la escuela y vinculadas a distintas áreas del conocimiento.

APRENDER MATEMÁTICAS A PARTIR DE PROBLEMAS

Centrar la enseñanza de la Matemática en las habilidades de resolución de problemas, puede aparejar el riesgo de perder de vista el elemento más potente a considerar, que es sin duda el de los conceptos matemáticos que se ponen en juego, el del progreso en la adquisición del conocimiento matemático.

Guy Brousseau[3] analiza el concepto de " hacer matemáticas" con los alumnos. Señala que en esa propuesta se justifica el tratamiento de la matemática exclusiva y totalmente por las circunstancias y la vida de los alumnos. Es una matemática sin referencia al pasado. Esta postura, dice, constituye la negación del objetivo mismo de la enseñanza, que es comunicar un saber cultural, laboriosamente adquirido.

En cambio, señala, el docente "debe *rehacer* matemáticas conocidas buscando qué tipo de problemas permiten resolver, qué tipo de preguntas conducen a plantear..." "... resolver un problema es sólo una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar sus soluciones."[4]

Roland Charnay[5] diferencia en la resolución de problemas dos tipos de objetivos.

---

[1] Abrantes, Pablo. Universidad de Lisboa. "El papel de la resolución de problemas en un contexto de renovación curricular". Revista Uno Nº 8 Abril 1996

[2] Abrantes, Pablo. Op.cit.

[3] Brousseau, Guy "Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas" IREM: Université de Bordeaux, France

[4] Brousseau, Guy "Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática" Université de Bordeaux, France

[5] Charnay, Roland "Aprender por medio de la resolución de problemas" En Parra, Cecilia y Saiz, Irma (compiladoras) "Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones." Editorial Paidos. Buenos Aires 1994.

Los objetivos de orden metodológico que refieren a la actividad misma de resolver problemas.

Los problemas son abiertos y dan lugar a aprendizajes diversos basados en la investigación.

Los objetivos de orden cognitivo, que apuntan al conocimiento matemático a partir de la actividad de resolver problemas**.**

Desde este último punto de vista se distinguen dos objetivos para la presentación de los problemas: planteo de problemas para la ***construcción de un nuevo conocimiento*** y problemas que se plantean **para *resignificación de conocimientos*** en proceso de construcción.

No se trata de presentar problemas aislados sino organizados en secuencias ***que promuevan avances en la construcción de los conceptos matemáticos involucrados****.*

Régine Douady y Marie Jeanne Perrin,[6] señalan algunas de las hipótesis sobre las cuales se apoyan para la construcción de una secuencia de aprendizaje:

- Los conceptos toman su sentido gracias a los problemas que permiten resolver. Cada nuevo problema contribuye a enriquecer el concepto.
- Un nuevo concepto se construye también situándose en relación a los conocimientos ya adquiridos, sea para ampliarlos y generalizarlos, sea para cuestionarlos y construir otros nuevos mejor adaptados al problema propuesto.
- Un problema hace en general intervenir varios conceptos. Cada uno toma su sentido en las relaciones que establece con los otros conceptos implicados en el problema.

En este enfoque la labor del docente consiste en organizar cuidadosamente las *situaciones – problema*, situaciones didácticas complejas que requieren tener en cuenta numerosos aspectos.

Deberá estar presente el contenido que se quiere enseñar, deberá estar planteado desde un contexto dado y formando parte de un significado, deberá constituir un desafío para el alumno o el grupo de alumnos, deberá promover el uso de lenguajes matemáticos, deberá permitir que sean los alumnos los que validen los resultados, deberá ser posible de enfrentar con los conocimientos matemáticos o informales de que los niños se han apropiado, deberá cuestionar esos conocimientos para construir otros que sean los idóneos para resolver la situación.

No se trata pues de encontrar un problema motivador e interesante que cada alumno pueda resolver de la manera que pueda y desee, sino de promover en

---

[6] Douady, Régine; Perrin, Marie-Jeanne IREM de Paris Sud "Investigaciones en Didáctica de Matemáticas." Revista Hacer Escuela Año 9, Nº 9. Buenos Aires

los alumnos nuevos aprendizajes matemáticos que constituyan avances cognitivos.

Son dos partes, dice Brousseau[7], del rol del maestro: "hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, además, transformar esa "respuesta razonable" ***en un "hecho cognitivo" extraordinario, identificado y reconocido desde el exterior*.**"

Para ello es necesario pensar en los diferentes aspectos de la ***situación didáctica*** que se va a desarrollar.

"...La creación y la gestión de las situaciones de enseñanza no son reductibles a un arte que el maestro podría desarrollar espontáneamente con buenas actitudes (escuchar al niño, etc.) en torno a simples técnicas (utilizar juegos, material o conflicto cognitivo, por ejemplo). La didáctica no se reduce a una tecnología, y su teoría no es la del aprendizaje sino la de ***la organización de los aprendizajes de otro, o más generalmente, la de la difusión y la transposición de los conocimientos."***[8]

SELECCIÓN Y ANÁLISIS DEL CONTENIDO

A raíz del diagnóstico del grupo y del estudio del Programa Escolar, cada docente habrá seleccionado los conocimientos matemáticos a tratar durante el curso y los diversos tratamientos posibles de los mismos. Determinará entonces en qué momento será pertinente abordar esos conocimientos, dada la situación de su grupo.

Para Brousseau[9] es esencial **darle un sentido** a los conocimientos.
El sentido de los conocimientos se compone de:

- el tejido de los razonamientos y pruebas en los que está implicado
- el tejido de las reformulaciones y formalizaciones que permiten manipularlo
- los modelos asociados a él

Gérard Vergnaud[10] lo expresa de otra manera. Los conceptos guían y resultan de la actividad de resolución de problemas. Un concepto involucra un conjunto de **situaciones** que le otorgan significado; un conjunto de **invariantes** - propiedades del concepto - subyacentes al razonamiento matemático; y un conjunto de **símbolos** utilizados en su representación.

Pongamos un ejemplo:

---

[7] Brousseau, Guy " Los diferentes roles del maestro" en Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones. Parra y Saiz (compiladoras) Paidós Buenos Aires, 1995
[8] Brousseau, Guy "Los diferentes roles... Op. cit
[9] Brousseau, Guy "Los diferentes roles... Op. cit
[10] Vergnaud, Gérard. Entrevista realizada por María E. Quaranta y Cinthia Raischmir para la revista Novedades Educativas.

En el Programa Escolar aparece el contenido "fracciones", a partir de 2º año. El maestro de cada grado se pregunta por ese conocimiento:

¿Cuál es su naturaleza? ¿Qué conceptos incluye? ¿Cuál es su relación con otros conceptos?

- Fracción es una expresión de un número racional. El conjunto de los números racionales es un conjunto numérico denso a diferencia del conjunto de los números naturales que es discreto.

- Concepto de racionales como todos los números que se expresan mediante cociente de dos números enteros: entre ellos se encuentran todas las fracciones, los porcentajes y demás decimales que pueden representarse como fracciones.

- Noción de número racional como familia de fracciones equivalentes.

- Características del racional: todo racional es producto de una división. Las divisiones dan lugar a decimales exactos o periódicos. (Los que son infinitos no periódicas pertenecen al conjunto de los números irracionales.

- Operaciones en este conjunto (siempre pueden realizarse obteniéndose un resultado dentro del conjunto): adición, sustracción, multiplicación, división exacta.

- Distintas notaciones de los racionales: fraccionaria, decimal, porcentual.

¿Cómo se relaciona y en qué se diferencia de los números naturales que el alumno ya conoce?

Según el grado, será necesario resignificar los conceptos construidos por los alumnos en su frecuentación de situaciones en el conjunto de los naturales, y que no son válidos en los racionales:

- entre el 1 y el 2 no hay otro número
- la multiplicación siempre aumenta
- una fracción no es un número sino dos.
- el cociente de una división es siempre menor que el dividendo.

El docente deberá preguntarse también ¿Qué tipo de situaciones resuelven estos conocimientos? ¿Cuáles son los distintos sentidos de las fracciones? ¿Con qué significados se presenta?

- Como parte de un todo
- Como subconjunto de un conjunto discreto
- Como cociente
- Como constante de proporcionalidad
- Como comparación
- Como un punto en la recta numérica
- Como expresión de la probabilidad

¿Cuáles son los contextos de uso de estos diferentes significados?

- La vida cotidiana: recetas de cocina, compras
- Juegos
- Noticias del periódico y textos de divulgación científica: gráficas, barras
- Relacionados con temas de unidades didácticas planificadas: interés, IVA
- Contextos intramatemáticos: juegos de números, acertijos, desafíos matemáticos.

De todas esas posibles situaciones el maestro seleccionará las que tengan sentido en el campo de conocimientos de sus alumnos. Tendrá en cuenta sus conocimientos anteriores ya consolidados, conocimientos en proceso de construcción, conocimientos que aún no han abordado.

Podrá entonces planificar secuencias didácticas, en las cuáles la presentación de los conocimientos para construir, resignificar y reorganizar conocimientos, se constituyan como problemas para sus alumnos.

LA GESTIÓN DE LOS PROBLEMAS

- **Elección de la situación o de la serie de situaciones problema.**

La elección del problema dependerá de los propósitos ya definidos por el docente. Dichos propósitos podrán ser:

- ***Explorar los niveles de aproximación a un conocimiento dado, presentes en el grupo.***
- ***Promover la reorganización conceptual de conocimientos parcialmente construidos***.

Debemos distinguir los problemas generados por estos propósitos, del "repaso" o "afirmación de conocimientos" presentes en las prácticas escolares instaladas. Se trata de plantear situaciones de "familiarización" con el conocimiento nuevo, concepto que ha sido desarrollado por Régine Douady.
"Douady dice[11] que esta familiarización tiene el objetivo de que lo nuevo se convierta en viejo, y el uso más importante de ese conocimiento viejo, es el que se le dará para resolver nuevos problemas en los que habrá que construir nuevos conocimientos, pero que siempre van a involucrar la utilización de conocimientos anteriores. Para que algo sea una situación problemática para un chico o para un grupo, tiene que cumplir dos requisitos fundamentales; el primero es tener sentido en el campo de conocimientos del chico; es decir, él tiene que tener esquemas previos que ha construido, a partir de los cuales va a abordar y comprender el nuevo problema. Por eso un problema siempre pone en

[11] Lerner, Delia. El aprendizaje y la enseñanza de la Matemática. Planteos actuales. Revista Novedades Educativas, Nº 52. Buenos Aires.

acción los conocimientos anteriores y esa es una manera nada aburrida ni repetitiva de volver sobre los conocimientos anteriores."

- ***Resignificar conocimientos en situaciones diferentes a aquellas en las que se generó***
- ***Construir conocimiento nuevo***

Para resignificar conocimientos aprendidos en otros contextos y con otro sentido y para construir conocimiento nuevo, es necesario partir de las conceptualizaciones e hipótesis que los niños tienen en relación con el contenido. Se propondrán situaciones que presenten obstáculos, que promuevan conflictos, que puedan ser enfrentadas con el conocimiento previo pero que lo revelen insuficiente para encontrar la solución más adecuada a la situación. "... otro requisito para la situación problemática[12] es que con el conocimiento viejo no sea suficiente y que haya que construir uno nuevo; que el conocimiento viejo conduzca a dar una primera solución al problema, pero esta solución no es la más satisfactoria, económica, mejor o correcta, y entonces hay que construir otro conocimiento."

- **Elección de las variables de la situación didáctica.**

La consigna

La consigna o forma de plantear el problema, es una variable didáctica sobre la cual debemos reflexionar.
No basta, dice Brousseau[13] "comunicar" un problema al alumno, para que ese problema se convierta en "su problema" y se sienta responsable de resolverlo. La situación debe ser propuesta de manera tal que el alumno produzca sus conocimientos como "respuesta personal" y los haga funcionar por exigencia de la situación, de la cual se ha apropiado, y no como respuesta a un deseo del maestro. En uno y otro caso la significación es totalmente diferente. Un verdadero problema genera una necesidad, en relación con obligaciones que no son arbitrarias ni didácticas.
Cuando el alumno se involucra en la solución del problema, ya no depende del maestro para decidir si ha triunfado o fracasado en la tarea. Las actividades deben ser planteadas de tal manera que permitan que sean los propios alumnos los que puedan obtener la información acerca de si lograron el resultado que esperaban. Si enfrentan dificultades, la consulta al docente o a un compañero operará como apoyo para seguir pensando. Se posibiltará que descubran sus errores y ellos mismos los corrijan, avanzando en el trabajo a partir de la reorganización de sus conocimientos.

Una misma tarea se constituye o no en problema, según la consigna dada.
Veamos un caso de construcción de triángulo y cálculo de área en 5º año.
La propuesta habitual sería por ejemplo: "Elegimos para nuestra escuela una insignia con forma de triángulo acutángulo de tanto de base y tanto de altura.

[12] Lerner, Delia, op.cit.
[13] Brousseau, Guy "Los diferentes roles... Op. cit

Dibújala. Dime cuánta tela llevará cada insignia.” Los alumnos seguramente asumirán que es un isósceles y que solamente hay un triángulo posible. Utilizarán el aprendido algoritmo de trazado para dibujarlo. Aplicarán luego la fórmula aprendida para hallar el área. ¡No hay problema!
Un problema para el nivel podría ser: “Algunos triángulos cumplen con estas condiciones: tienen sus ángulos menores que el recto, y tienen tanto de base y tanto de altura. Construye tres de ellos. Compara sus superficies y justifica el resultado.”
En este caso nos movemos en contexto intramatemático. No aparecen situaciones de la vida cotidiana, ni del medio social. Sin embargo, no se trata de una situación repetitiva ni de aplicación inmediata, sino que exige poner en juego ciertas propiedades y reflexionar sobre ellas.

Los materiales

La elección de los materiales influye en los razonamientos a realizar, las propiedades a considerar, los conocimientos a construir. En la situación que recién planteamos propondríamos el uso de una regla graduada y una escuadra como únicos materiales. El uso del compás y/o el semicírculo, que se utilizan habitualmente en el aula para la construcción de triángulos, interferiría seguramente, llevando al trazado independiente de cada triángulo lo que podría dificultar la comparación.
De la misma manera, cuando nos proponemos la construcción de propiedades geométricas, como por ejemplo propiedades de las diagonales de los paralelogramos, no conviene utilizar reglas o escuadras graduadas que hacen intervenir la variable medida que no es de interés en la situación.
Frente a materiales como el tangram, las regletas, los instrumentos de medida y tantos otros de uso escolar, debemos definir previamente, dada la situación, cuáles son los que propiciarán los conocimientos que se intenta poner en juego.

La organización de la clase.

Los problemas podrán ser resueltos en forma colectiva, mediante debate, en pequeño grupo, en parejas o en forma individual. Esta variable dependerá de los objetivos definidos por el docente, de la situación del grupo, de la dificultad del planteo.

- **Etapa de resolución**

Los alumnos con la forma de organización elegida:

- seleccionan los datos
- eligen las operaciones o acciones a realizar
- buscan soluciones personales por distintas vías

- llegan a un resultado
- reconocen si el resultado es verosímil

- **Puesta en común**

Con la coordinación del docente, los alumnos comunican a los compañeros los caminos seguidos.
Se analizan grupalmente los distintos caminos propuestos.
Se discute sobre cuáles son los más útiles y económicos.

La gestión de la puesta en común es un momento crucial en el proceso de enseñanza. Hemos afirmado que un problema es tal cuando el alumno lo puede enfrentar con los conocimientos que posee, pero estos no son suficientes o no funcionan en la forma esperada y esto lo lleva a buscar alternativas de solución generando sus propias estrategias.
Esa concepción deberá ser profundizada.[14] Si cada niño resuelve la situación y encuentra el resultado, pudiendo validarlo, eso no significa igual nivel de aprendizaje.

Supongamos que hemos planteado en un grupo de 3er año, una situación de averiguar cuántos casilleros tiene un damero. Algunos alumnos llegaron al resultado enumerando uno a uno, un segundo grupo por adición fila por fila y un tercer grupo multiplicando.
Todos los alumnos lograron la solución correcta y todos pudieron validarla por sí mismos.
Sin embargo, los niños que utilizaron el primer procedimiento se vieron sometidos a un engorroso conteo, los del 2º grupo a una larga operación de adición. Los niños del 3er grupo utilizaron una estrategia más potente matemáticamente y también más económica y práctica en la realidad. Sobre todo es transferible a situaciones más complejas, como un cuadriculado bastante mayor.
No basta entonces con plantear una situación abierta y pasible de ser enfrentada de diversas maneras. Importa además determinar los niveles de resolución esperados y las posibilidades del grupo de ir avanzando hacia conocimientos más complejos y generalizables.

Si un alumno ante 126 x 15 en lugar de realizar el algoritmo convencional multiplica 126 por 10 y 126 x 5 y luego suma los resultados, obtendrá la solución adecuada. Demostrará comprensión de las reglas del sistema de numeración y de las propiedades de la operación, que no hubieran quedado en evidencia con el uso del algoritmo convencional.

Momento de síntesis y de institucionalización

[14] Evaluación en Matemática. Revista Quehacer Educativo Nº 38, noviembre de 1999

Finalizada la puesta en común, corresponde la institucionalización de los conocimientos por parte del docente y la formalización de los mismos en el nivel adecuado al grupo. Se institucionaliza el sentido - aspectos semánticos- y se les da nombre y expresión matemática - aspectos sintácticos-.

El docente analiza qué operaciones se usaron, qué reglas o propiedades se pusieron en juego, revisa el proceso, lo socializa, ayuda a reconocer el contenido matemático y a expresarlo en el lenguaje matemático.
La mediación del docente posibilitará a cada alumno avanzar desde su punto de partida, para construir conceptos cada vez más ajustados a la naturaleza del conocimiento matemático.

Es el momento de "la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización".[15]

Decíamos que se institucionaliza el objeto matemático y se institucionaliza también su sentido. La institucionalización del sentido presenta problemas para la enseñanza de las Matemáticas. Brousseau plantea el ejemplo de la división. Usamos la división con sentidos diferentes, pero no existe un objeto de conocimiento denominado "el sentido de la división". ¿La didáctica, se pregunta Brousseau, tiene derecho a introducir en el campo de las matemáticas conceptos que le serían necesarios? Es preciso reflexionar sobre eso, puesto que esa construcción del sentido implica clasificaciones, recursos, terminología. Los maestros deberán trabajar sobre el sentido, deberán identificarlo y explicarlo.

Es el caso del ejemplo planteado sobre los números racionales donde proponíamos considerar los diferentes significados de las fracciones. Esos significados no constituyen un objeto matemático, pero sí un objeto ineludible en Didáctica de la Matemática.

PLANIFICAR BUENAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Plantear buenas situaciones didácticas, que cumplan con las condiciones desarrolladas, es el desafío que queda planteado a los maestros. No se nos oculta que es una tarea compleja.

Los variados contextos de uso de la matemática llevan muchas veces a la fragmentación de los conocimientos para "integrarlos" en proyectos o unidades didácticas como aporte para la solución de problemas que provienen del medio social. Si se quiere evitar esa fragmentación se corre el riesgo de planificar secuencias cerradas donde la Matemática funcione como un cuerpo de conocimiento ajeno a los usos culturales.

---

[15] Brousseau, Guy "Los diferentes roles... Op. cit

... "es difícil obtener estas (buenas) situaciones (didácticas) de manera no planeada, a partir de los sucesos espontáneos que se dan en el desarrollo de *proyectos integradores*, pues se corre el riesgo de obtener efectos no deseados: situaciones pobres, mal aprovechadas o la aparición de problemas demasiado complejos para poder ser tratados. Las dos opciones: *situaciones integradoras* y *situaciones específicas para matemáticas*, son necesarias. El maestro podría disponer de situaciones didácticas de buena calidad para enseñar matemáticas y procurar, en la medida de lo posible, recrearlas a partir de los proyectos integradores.[16]

---

[16] David Block *Análisis de situaciones didácticas* en Revista Básica Nº 11, Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano.